ABEL R. CABALLERO

La Selección de las técnicas con capital fijo y progreso técnico

El análisis de la selección de las técnicas, y el de su apartado, el problema del retorno de las técnicas, ha sido en general tratado para el caso de que sólo existiese capital circulante y en ausencia de cualquier tipo de progreso técnico. En la primera parte del presente artículo abordaremos el tratamiento del problema de la selección de las técnicas dentro de un modelo en el que el capital fijo está presente, considerando que también puede existir algún tipo de progreso técnico. En la segunda parte del artículo, el análisis se centrará en un aspecto más concreto del problema de la selección de las técnicas, la obsolescencia.

El objetivo perseguido es doble. Por una parte demostrar que la extensión de la tan estudiada cuestión de la selección de las técnicas a los casos mencionados es posible, y por otra establecer bajo qué condiciones es posible realizar esta extensión.

I

El análisis se realizará en un modelo de producción definido como sigue

$$
\begin{array}{cccccc}
O & M_0 & & & & \\
 & O & M_1 & & & \\
 & & O & M_2 & & \\
 & & & O & & \\
 & & & & O & M_n \\
O & \dots & \dots & \dots & O & O
\end{array}
\equiv A
\qquad
\begin{array}{cccccc}
M_0 & & & & & o \\
 & M_1 & & & & \\
 & & M_2 & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & M_n & \\
O & C_0 & \dots & \dots & C_{n-1} & C_n
\end{array}
\equiv B
$$

$$[a_k \; a_0 \; a_1 \; \dots \; a_n] \equiv 1$$

donde A representa la matriz de los inputs de capital, B representa a la matriz de los outputs, y 1 representa al vector de los inputs de trabajo.

Este proceso de producción puede considerarse de dos formas, teniendo lugar a través del tiempo o dentro de un período dado de tiempo. Veamos el primer caso. En $t = O$, se inicia el proceso con a_k de trabajo que, desasistido de ningún bien de capital, produce M_o del bien de capital M. En $t = 1$, a_o de trabajo y M_o de bien de capital M nuevo producen C_o del bien de consumo C y M_1 del bien de capital M, pero ahora de un año de edad. En $t = 2$, a_1 de trabajo conjuntamente con M_1 del bien de capital M de un año de edad producen C_1 del bien de consumo C y M_2 del bien de capital M, pero ahora de dos años de edad. El proceso continuaría hasta el período $t = n + 1$ en el que el bien de capital alcanza el fin de su vida útil (suponemos que sin poseer ningún valor residual) por lo que la actividad correspondiente a ese año puede escribirse como a_n de trabajo junto con M_n del bien de capital de n años de edad producen C_n del bien de consumo.[1]

En el segundo caso todo este proceso estaría teniendo lugar dentro de un período de tiempo.

Como se puede apreciar el tratamiento de la depreciación de los bienes de capital fijos se realiza a través de la utilización de la producción conjunta en la forma señalada por Sraffa.[2] En todo momento supondremos rendimientos constantes.

1. *Criterio de Rentabilidad*

Las ecuaciones de los precios de este sistema, en notación matricial, vienen dadas por

$$l_w + PA(1 + \pi) = PB \qquad [1]$$

donde

ω = salario
π = tasa de beneficio
P = vector de precios, incluyendo el del bien de consumo y los de los bienes de capital tanto nuevos como usados.

Operando, obtenemos que el precio del bien de consumo, P_c, viene dado por

1. Para un análisis detallado del encuadre del presente modelo véase «La Teoría de Producción de Sraffa, Leontief y Pasinetti: Una Integración y su Generalización», del autor, de próxima aparición en la *Revista Española de Economía*.
2. P. Sraffa, *Producción de Mercancías por Medio de Mercancías*, Cambridge University Press, 1960.

$$P_c = \frac{a_k(1+\pi)^{n+1} + \sum_{i=o}^{n} a_i (1+\pi)^{n-i}}{\sum_{i=o}^{n} C_i (1+\pi)^{n-i}} . \qquad [2]$$

Tomando el bien de consumo como numerario, $P_c \equiv 1$, y operando obtenemos

$$\omega = \frac{\sum_{i=o}^{n} C_i \, (1+\pi)^{-i-1}}{a_k + \sum_{i-o}^{n} a_i \, (1+\pi)^{-i-1}} \qquad [3]$$

que constituye la línea salario-beneficio correspondiente a la técnica determinada por los valores concretos adoptados por los a_i y los C_i.

Veamos las características básicas de esta línea salario-beneficio. Cuando $\pi = 0$ tenemos que

$$\omega = \frac{\sum_{i=o}^{n} C_i}{a_k + \sum_{i=o}^{n} a_i}$$

que constituye el salario máximo que el sistema puede pagar, que se iguala al producto total neto per cápita.

Por otra parte cuando $\omega = 0$, tenemos que $\pi \rightarrow \infty$. Esto es, no existe una tasa máxima finita de beneficio debido al hecho de que la mercancía que está siendo producida, C, no entra ni directa ni indirectamente en su propia producción.

El signo de la derivada $d\omega/d\pi$ puede adoptar cualquier valor positivo o negativo, por lo que en principio esta curva no se podría trazar estrictamente decreciente; pero como demostraremos más adelante los tramos relevantes, bajo algunos supuestos, serán extrictamente negativos.

Está claro que este análisis se aplica a cada una de las técnicas que puedan ser adoptadas en un momento determinado. Las características básicas de cada una de ellas podrían ser similares a la que acabamos de considerar, en tanto que otras podrían tener una tasa máxima de beneficio finita, debido a que en estas técnicas el bien de consumo podría ser necesario para su propia producción.

Entonces podemos representar en un mismo gráfico las líneas salario-beneficio correspondientes a las diversas técnicas.

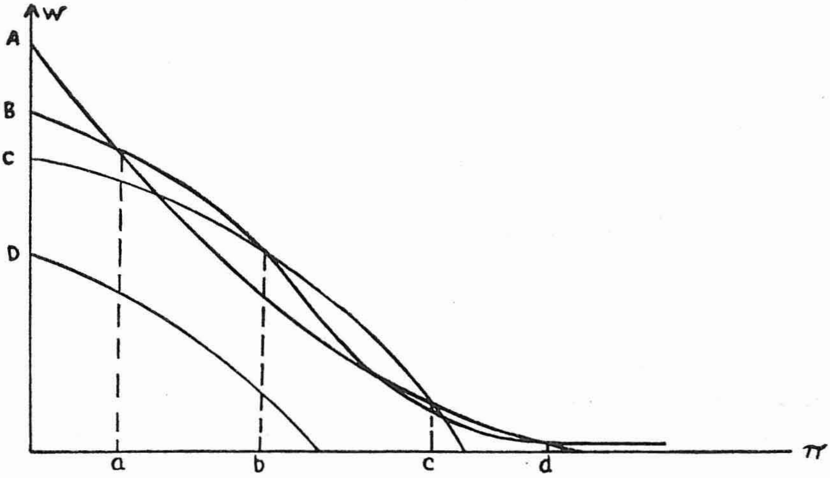

Figura 1

Siguiendo el criterio de rentabilidad, como es sabido, para cualquier π dado seleccionaremos aquella técnica que nos dé el ω máximo posible.[3] Y está claro que no existe ninguna razón que prevenga el que el retorno de las técnicas tenga lugar.[4]

2. — *El criterio de Eficiencia*

Supongamos que el sistema crece a una tasa g, debido por ejemplo a la existencia de un crecimiento de la población a aquella tasa; supongamos también que en todo el sistema existe una sola técnica en funcionamiento.

3. Esto es lo mismo que seleccionar aquella técnica que da los precios menores para un π dado, que por supuesto es las elección más rentable. En relación con esto véase L. L. Pasinetti, *Lezioni di Teoría della Produzione,* Societa Editrice el Mulino, Bologna, 1975.

4. Las implicaciones y condiciones para que este retorno tenga lugar son de sobra conocidas como para detenerse demasiado en ellas. Baste con establecer que el retorno entre dos técnicas α, y β, con las características básicas antes vistas, existirá en el cuadrante positivo si la ecuación

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} C_i^{\alpha}(1+\pi)^{-i-1}}{a_k^{\alpha}+\sum_{i=0}^{n} a_i^{\alpha}(1+\pi)^{-i-1}} = \frac{\sum_{i=0}^{m} C_i^{\beta}(1+\pi)^{-i-1}}{a_k\beta+\sum_{i=0}^{m} a_i\beta(1+\pi)^{-i-1}}$$

tiene más de una raíz positiva.

Si definimos la matriz diagonal α (t) como sigue

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & (1+\ )^{-1} & & & & \\ & & (1+g)^{-2} & & & \\ & & & \cdot & & (1+g)^{t} \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ 0 & & & & & (1+g)^{-n-1} \end{bmatrix}$$

tenemos que la estructura del sistema en un momento determinado viene dada por $A\hat{\alpha}$ (t), $B\hat{\alpha}$ (t) y $l\hat{\alpha}$ (t).

De aquí, en t = 0, obtenemos la siguiente información:

Producción total del bien de consumo $C = \sum_{i=o}^{n} C_i \, (1+g)^{-i-1}$.

Cantidad total de trabajo empleado, $L = a_k + \sum_{i=o}^{n} a_i \, (1+g)^{-i-1}$, de modo que el output per cápita del bien de consumo es

$$\frac{C}{L} = \frac{\sum_{i=o}^{n} C_i \, (1+g)^{-i-1}}{a_k + \sum_{i=o}^{n} a_i \, (1+g)^{-i-1}} \qquad [4]$$

Esta expresión es exactamente igual a [3], cuando en lugar de ω y π escribimos C/L y g respectivamente. En consecuencia, tan pronto como consideremos todas las técnicas conocidas, obteniendo una expresión como la [4] para cada una de ellas, podríamos trazar un gráfico como el 1, pero con C/L y g encabezando los ejes. Cada punto de cada una de las curvas de este gráfico representa, en un análisis de dinámica comparativa, un sistema económico alternativo, estando todos ellos obtenidos a partir de la misma tecnología básica. Cada uno de los sistemas así representados estará siguiendo una senda dinámica concreta, con su propia tasa de crecimiento y su propio consumo per cápita.

Esta discusión ha sentado las bases de otro criterio de selección de técnicas, el de rentabilidad, según el cual se elige aquella técnica que para una tasa de crecimiento dada, g, proporciona el consumo per capita máximo. Aún cuando es muy poco probable que este criterio sea usado en una economía capitalista, es de gran ayuda analítica el mantenerlo como referencia de racionalidad y eficiencia con el que se pueda comparar la selección resultante de la aplicación del criterio de rentabilidad, que será el que guíe las decisiones en una economía capitalista descentralizada.

En base a la coincidencia de la estructura de las expresiones [3] y [4], está claro que el retorno de las técnicas puede tener lugar también en el lado físico. Esto significa que no podemos ordenar las diferentes técnicas en términos de sus «intensidades de capital» independientemente de la tasa de crecimiento.

En lo que se refiere a la comparación de los dos criterios está claro que cuando $\pi = g$ entonces $\omega = C/L$ lo que significa que (a) la selección a través de cada uno de los dos criterios es coincidente y (b) el salario se iguala al consumo per capita máximo que se puede obtener en el sistema.

3.—*La selección de las técnicas con progreso técnico no incorporado*

Supongamos que el progreso técnico tiene lugar homogéneamente a una tasa ρ en toda la fuerza de trabajo empleada por una técnica en un momento dado. Pero además de esto adoptemos también el supuesto de que la misma tasa, de progreso técnico, ρ, tiene lugar en todas las técnicas conocidas, irrespectivamente de si están en uso o no.[5] Así pues, para cada técnica conocida tenemos

$$a_i(t) = a_i(o)(1+\rho)^{-t}, \qquad i = k, o, 1 \ldots n$$

La estructura del sistema vendría dada por A $\hat{\alpha}'(t)$, B $\hat{\alpha}'(t)$ y $1\,\hat{\alpha}'(t)$, donde $\hat{\alpha}'(t)$ es una matriz como $\alpha(t)$, donde en lugar de g aparece ρ. El vector de los coeficientes de trabajo es ahora

$$1 \equiv [a_k, a_o, a_1 \ldots a_n](1+\rho)^{-t}$$

Las ecuaciones de los precios, en forma matricial, para una de estas técnicas, viene dada por [1] pero con el 1 que acabamos de definir. A partir de aquí podemos obtener el precio del bien de consumo, del que, tras manipulaciones, y eligiéndolo como numerario, $P_c \equiv 1$, obtenemos la línea salario-beneficio siguiente

$$\omega_t = \frac{\sum_{i=o}^{n} C_i (1+\pi)^{n-i}}{a_k (1+\pi)^{n+1} + \sum_{i=o}^{n} a_i (1+\pi)^{n-i}} (1+\rho)^t. \qquad [5]$$

5. No entraremos en la discusión de la mayor o menor plausibilidad de este supuesto; solamente apuntaremos que cuando este tipo de progreso técnico, que puede consistir principalmente en mejoras de organización, racionalización, etc., tiene lugar no parece lógico asignar diferentes tasas de progreso a técnicas diferentes en el mismo período, o ni siquiera a alguna de ellas.

Aquí hoy dos puntos a ser considerados:

a) El primero es en relación con la técnica aislada en consideración y se refiere a la forma en que ésta cambia a través del tiempo. El salario correspondiente a cualquier tipo de beneficio dado aumenta a la tasa ρ. Este hecho del salario aumentando a la tasa ρ puede representarse gráficamente.

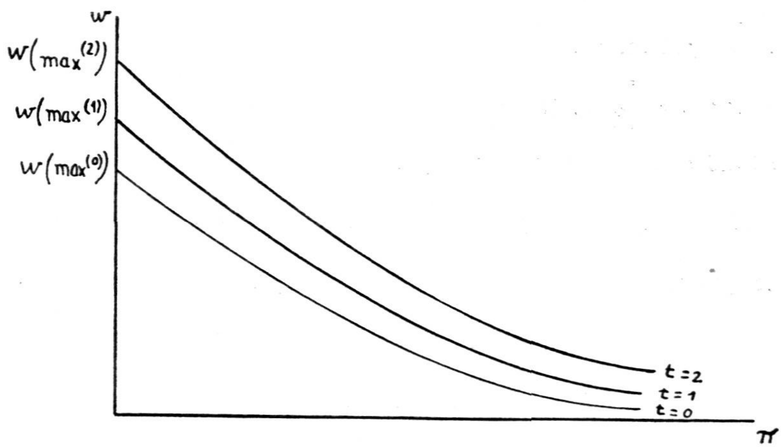

Fig. 2

y se visualiza muy claramente en el aumento que tiene lugar período tras período en el salario correspondiente a $\pi = 0$,

$$\omega\ [\text{Max. }(1)] = \frac{\sum_{i=0}^{n} C_i}{a_k + \sum a_i}(1+\rho) = \omega\ [\text{Max. }(0)]\ (1+\rho),$$

y en general

$$\omega\ [\text{Max. }(t) = \omega\ [\text{Max. }(0)]\ (1+\rho)^t\ {}^{6}.$$

b) El segundo punto es en relación con la rentabilidad relativa de las técnicas, que es el elemento fundamental para la selección de la técnica óptima. Dado que supusimos que la misma tasa de progreso técnico no incorporado tiene lugar en todos los coeficientes de tra-

6. Debería notarse que π (max.) en el caso general en que fuese finito permanecería inalterado por la acción del progreso técnico, ya que depende solamente de las matrices tecnológicas A y B.

bajo simultáneamente,[7] entonces el salario aumentará en todas las técnicas a la misma tasa ρ. En estas circunstancias está claro que la rentabilidad relativa no va a variar con el paso del tiempo, y de hecho la situación relativa sería equivalente a la que existe sin progreso técnico.[8]

A continuación obtendremos la relación entre el consumo per cápita y la tasa de crecimiento en el caso de progreso técnico no incorporado. Como antes, suponemos que en todas las columnas de las matrices se encuentra la misma técnica.

El output total del bien de consumo obtenido de este sistema viene dado por $C = \sum_{i=o}^{n} C_i (1+\rho)^{-i-1} (1+\rho)^t$, mientras que la fuerza de trabajo total empleada viene dada por

$$L = a_k + a_o (1 + \rho)^{-1} + a_1 (1 + \rho)^{-2} + \ldots + a_n (1 + \rho)^{-n-1},$$

por lo que el consumo per cápita viene dado por

$$\frac{C}{L} = \frac{\sum_{i=0}^{n} C_i (1 + \rho)^{-i-1}}{a_k + \sum_{i=0}^{n} a_i (1 + \rho)^{-i-1}} (1 + \rho)^t \qquad [6]$$

Es evidente que esta expresión tiene una estructura idéntica a [5], pero ahora referida a C/L y ρ. Entonces todas las observaciones que acabamos de hacer tienen aquí plena validez. Además, al igual que sucedió en el caso de inexistencia de progreso técnico, tenemos que cuando $\pi = \rho$, ambas relaciones, [5] y [6] son exactamente la misma, por lo que la técnica seleccionada por cualquiera de los dos criterios —rentabilidad y eficiencia— es la misma. Podemos entonces concluir que la existencia de progreso técnico no incorporado a la tasa común ρ, no dificulta la coincidencia de ambos criterios en el caso en que $\pi = \rho$.

7. Si, por el contrario, diferentes técnicas experimentan progreso técnico a tasas diferentes, entonces a la vista de la figura 2, y dado que una de las técnicas se desplazaría hacia arriba, con el paso del tiempo, más aprisa que las demás, eventualmente surgiría una situación tal que la técnica con la tasa de crecimiento mayor sería la dominante en todo el intervalo de variación de π. La situación es ligeramente diferente si la tasa máxima de beneficio correspondiente a esta técnica, π^e, no es el π máximo de la frontera tecnológica, porque en este caso la conclusión que acabamos de obtener sería válida solamente para $0 \leqslant \pi \leqslant \pi^e$, mientras que para $\pi^e < \pi \leqslant \pi$ (max.) habría otra(s) técnica(s) en operación, a la(s) que se aplicaría la misma regla.

8. Esto se vería claramente si obtuviésemos la formulación matemática para el número de cruces en el cuadrante positivo, ya que acabaríamos exactamente con la expresión de la nota 4, por lo que el retorno de las técnicas no se puede descartar.

4. *La selección de las técnicas con progreso técnico incorporado*

Ahora consideraremos la selección de las técnicas cuando está teniendo lugar en el sistema progreso técnico del tipo incorporado. Esto es, supondremos que en todas las técnicas descubiertas cada año —aquellas que en ese año entran por primera vez en el libro de las técnicas— está teniendo lugar progreso técnico a la tasa ρ, irrespectivamente de si son o no introducidas en el proceso real de producción.[9] Centrémonos en una de estas técnicas.

La estructura del sistema vendría dada por las matrices **A**, **B** y $\alpha'(t)$ como en la sección 3, y el vector de los coeficientes de trabajo siguiente

$$l' \equiv [a_k \; a_0 (1 + \rho) \; a_1 (1 + \rho)^2 \ldots a_n(1 + \rho)^{n+1}] (1 - \rho)^{-t} \qquad [7]$$

Las ecuaciones matriciales de los precios serán

$$l\, w + PA(1 + \pi) = PB$$

viniendo el precio del bien de consumo dado por

$$P_c = \frac{a_k (1 + \pi)^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} a_i (1 + \rho)^{i+1} (1 + \pi)^{n-i}}{\sum_{i=0}^{n} C_i (1 + \pi)^{n-i}} w_t (1 + \rho)^{-t} \qquad [8]$$

Por lo tanto la línea salario-beneficio vendrá dada por

$$w_t = \frac{\sum_{i=0}^{n} C_i (1 + \pi)^{n-i}}{a_k (1 + \pi)^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} a_i (1 + \rho)^{i+1} (1 + \pi)^{n-i}} (1 + \rho)^{t} \qquad [9]$$ [10]

9. La justificación de la igualdad de las tasas de progreso técnico podría ser en base a que el descubrimiento de una serie de técnicas puede ser consecuencia de la misma corriente básica de invenciones.

10. Es interesante comparar esta expresión con la [5], obtenida en el caso de progreso técnico no incorporado. Para esto supongamos dos técnicas con los mismos coeficientes «básicos» (a_k, a_o, ... a_n y C_o, ..., C_n), una experimentando progreso técnico del tipo incorporado y la otra del tipo no incorporado. Entonces, para una tasa de beneficio común, la razón entre los salarios será:

$$\frac{w_t \text{ (no incorp.)}}{w_t \text{ (incorp.)}} = \frac{a_k(1 + \pi)^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} a_i (1 + \pi)^{n-i} (1 + \rho)^{i+1}}{a_k(1 + \pi)^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} a_i (1 + \pi)^{n-i}} = \text{constante} > 1,$$

que demuestra que el salario correspondiente a un π dado es mayor en el caso de progreso técnico no incorporado, como era de esperar.

Esta expresión nos plantea tres puntos:

a) El primero es que el salario correspondiente a cada técnica aumenta anualmente a la tasa ρ, para un π dado. Gráficamente esto significaría que la curva correspondiente se está desplazando como en la figura 2.

b) El segundo se refiere a que, bajo el supuesto de la igualdad de las tasas de progreso técnico, ρ, el número de intersecciones entre dos técnicas, así como los valores de π a los que las intersecciones tienen lugar, se mantendrían fijos en el tiempo.[11] En un análisis gráfico esto significaría que todas las curvas salario-beneficio se desplazarían verticalmente a la tasa ρ, para cualquier π.[12]

c) El tercero es en relación con las diferencias que existen entre el caso presente y aquel en el que no existe progreso técnico, o aún cuando existe, que éste sea del tipo incorporado. Tanto el número de intersecciones entre dos técnicas con los mismos coeficientes básicos, como los valores de ρ y w a los que tienen lugar, son diferentes con progreso técnico incorporado que sin él. Gráficamente obtendríamos un gráfico con las características de la figura 1, pero con las formas de las curvas completamente diferentes.

A través del criterio de rentabilidad, como sabemos, seleccionaríamos aquella técnica que nos diese, para un π dado, el salario máximo.

Consideremos ahora el criterio de eficiencia cuando tiene lugar progreso técnico incorporado. De la estructura del sistema, y para una técnica determinada, obtenemos la información siguiente:

Output total del bien de consumo

$$C = \sum_{i=0}^{n} C_i (1 + \rho)^{-i-1} (1 + \rho)^t$$

Empleo total

$$L = a_k + \sum_{i=0}^{n} a_i$$

11. Los cruces en el cuadrante positivo entre las técnicas α y β vendrán dados por las raíces positivas de la ecuación

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} C_i^{\alpha} (1 + \pi)^{n-i}}{a_k^{\alpha}(1 + \pi)^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} a_i^{\alpha}(1 + \pi)^{n-i} (1 + \sigma)^{i+1}} = \frac{\sum_{i=0}^{m} C_i^{\beta} (1 + \pi)^{m+i}}{a_k(1 + \pi)^{m+1} + \sum_{i=0}^{m} a_i^{\beta}(1 + \pi)^{m+i} (1 + \sigma)^{i+1}}.$$

12. Si el progreso técnico hubiese tenido lugar a tasas diferentes en las diferentes técnicas, hubiesen tenido lugar efectos similares a los considerados en la nota (7).

por lo que el consumo per cápita puede escribirse como

$$\frac{C}{L} = \frac{\sum_{i=0}^{n} C_i (1+\rho)^{n-i}}{a_k (1+\rho)^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} a_i \quad (1+\rho)^{n+1}} (1+\rho)^t \qquad [10]$$

Podemos entonces ver inmediatamente que cuando $\pi = \rho$ (tasas de beneficio y crecimiento iguales), las expresiones [9] y [10] son tales que C/L y ρ mantienen la misma relación que w y π, por lo que la técnica seleccionada por cualquiera de los dos criterios sería la misma.

Entonces podemos concluir que en general los resultados tradicionales concernientes a la selección de las técnicas son válidos cuando se extienden a un modelo con capital fijo y progreso técnico.

II

Hasta ahora hemos estado tratando con técnicas específicas, en la forma en que aparecen en el libro de las técnicas; y de este modo no hemos ni siquiera mencionado un punto muy importante: el período de vida de una técnica. En efecto, muchas técnicas pueden ser truncadas por razones económicas antes de que alcancen el fin de su vida física, suponiendo que sus características técnicas lo permitan.

Para tener en cuenta este efecto se puede proceder considerando cada posible tiempo de vida de cada técnica como una técnica diferente. Entonces todo lo que hasta ahora hemos dicho de las técnicas en general será aplicable a la selección de la duración óptima de las mismas. Pero antes de remitirnos a aquel análisis mucho puede decirse sobre este caso. En lo que sigue supondremos que $\pi = g$, tasas de crecimiento y beneficio iguales, por lo que la selección por el criterio de rentabilidad o el de eficiencia es idéntica.

Supongamos una técnica con una vida física de $n + 1$ años; las condiciones para la selección de la duración óptima pueden ser escritas como: seleccionar aquella duración, $h < n + 1$, que para una tasa de beneficio dada proporcione el salario máximo posible.[13] Analítica-

13. El criterio tradicional es ligeramente diferente: el proceso se detendrá en $t = h$ cuando

$$\sum_{i=h}^{H} (C_i - a_i w)(1+\pi)^{-i} < 0, \qquad \begin{array}{l} H = h+1,\ h+2\ldots\ldots \\ h = 1,\ 2,\ 3\ldots\ldots, \end{array}$$

esto es, para un h dado el valor de todas las colas consecutivas, $H = h + 1$, $H = h + 2$ ... hasta $H = n$, tienen que ser negativas.

mente este procedimiento podría formularse como: seleccionar aquella duración del equipo que maximiza

$$w_h = \frac{\sum_{i=0}^{h} C_i (1+\pi)^{-i-1}}{a_k + \sum_{i=0}^{h} a_i (1+\pi)^{-i-1}}, \qquad h = 1, 2, \ldots, n \quad \text{para un año dado} \qquad [11]$$

Gráficamente esto podría representarse como

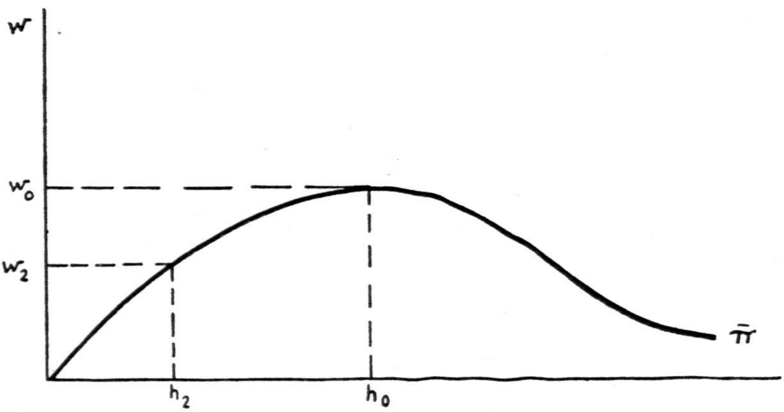

Fig. 3

donde h = 1,2, ..., n se refiere a cada una de las posibles duraciones de la técnica, y w se refiere al salario pagado durante cada uno de los h años de duración de la vida. Así, por ejemplo, cuando la duración de la vida es seleccionada como h = 2 seremos capaces de pagar un salario de w_2 durante cada uno de los años de vida; entonces está claro en el gráfico que seleccionaremos una vida de h_0, que nos permitirá pagar el salario más elevado durante todo el período.

Esto opera para una tasa de beneficio dada, $\bar{\pi}$. Cuando ésta cambia producirá ciertos efectos sobre la curva y sobre la vida óptima que tendrán que ser averiguados.

2. *La vida óptima en relación con la productividad* [14]

En general definimos productividad creciente, constante y decreciente, como aquel caso en que, para una tasa de beneficio dada, $\bar{\pi}$, se tiene

$$(P_c C_i - a_i w) \lesseqgtr (P_c C_{i+1} - a_{i+1} w), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \ldots \qquad [12]$$

operando el < en el caso creciente, el = en caso constante y el > en el caso decreciente.

Puede probarse inmediatamente que estas expresiones son respectivamente cumplidas si, pero no sólo si, los coeficientes son tales que

$$\begin{array}{lcl} a_0 \geq a_1 \geq \ldots \geq a_n & y & C_0 \leq C_1 \leq \ldots \leq C_n \\ a_0 = a_1 = \ldots = a_n & y & C_0 = C_1 = \ldots = C_n \\ a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n & y & C_0 \geq C_1 \geq \ldots \geq C_n \end{array} \qquad [13]$$

Una vez establecidas estas definiciones, procedemos a demostrar que en una economía sin ningún tipo de progreso técnico el equipo de capital será usado hasta el final de su vida física si la productividad es creciente o constante.

Veamos primero el caso de productividad constante. El salario correspondiente a una duración del equipo de h años viene dado por

$$w_h = \frac{C_0 [(1+\pi)^{-1} + (1+\pi)^{-2} + \ldots + (1+\pi)^{-h}]}{a_k + a_0 [(1+\pi)^{-1} + (1+\pi)^{-2} + \ldots + (1+\pi)^{-h}]} \qquad [14]$$

$$h = 1, 2, \ldots, n$$

de donde podemos obtener

$$\frac{1}{w_h} = \frac{a_k}{C_0 \sum_{i=0}^{h} (1+\pi)^{-i-1}} + \frac{a_0}{C_0} \qquad [15]$$

La segunda fracción de la parte derecha es constante, en tanto que la primera varía en relación inversa a h, esto es, decrece a medida que h aumenta y crece cuando h disminuye. Entonces, en general, obtenemos que w aumenta con h. Por lo tanto, podemos concluir que el equi-

14. El concepto que denominamos productividad es generalmente conocido en la literatura como eficiencia; nosotros usamos el primero en lugar del segundo para evitar confusiones con el uso anterior de la palabra en relación con el criterio de eficiencia.

po será utilizado mientras su vida física lo permita; esto es, se utilizará hasta $h = n$.

Consideremos ahora el caso de productividad creciente. El inverso del salario en este caso aparecería como

$$\frac{1}{w_h} = \frac{a_k}{\sum_{i=0}^{h} C_i (1+\pi)^{-i-1}} + \frac{\sum_{i=0}^{h} a_i (1+\pi)^{-i-1}}{\sum_{i=0}^{h} C_i \;\; 1+\pi^{-i-1}} \qquad [16]$$

$$h = 1, 2, \ldots, n$$

donde como antes el primer cociente de la parte derecha disminuye a medida que h aumenta. Pero ahora el segundo (debido a la productividad creciente que produce que los sucesivos términos del numerador disminuyan progresivamente, mientras que los del denominador aumentan) también disminuye cuando h aumenta; entonces w_h aumenta con h. De esta forma concluímos, igual que antes, que es rentable utilizar el equipo de capital hasta el punto que lo permita su vida física.

Cuando la productividad es decreciente, el primer término de la derecha de [16] mantiene la misma tónica decreciente, mientras que el segundo aumenta con h. Entonces no podemos afirmar que w_h aumentará con h, ya que podría suceder que el incremento del segundo cociente fuese mayor que el decremento del primero, de forma que w_h disminuiría al aumentar h. Lo que podemos afirmar es que una vez que un w_h dado es menor que w_{h-1}, todos los sucesivos $w_{h-1}, \ldots, w_n$ serán también menores que w_{h-1}. Para demostrar esto debemos notar que $w_{h-1} > w_h$ significa que los valores de a_i y C_i, $i = 0, 1, \ldots, h$, son tales que el aumento del segundo término de la derecha de [16] fue mayor que la disminución del primero. Por consiguiente cuando se alcance la vida $h + 1$, y debido a la productividad decreciente, el primer término tendrá un incremento menor, mientras que el segundo tendrá un decremento relativamente mayor. Entonces w_{h+1} será menor que w_h, y por lo tanto menor que w_{h-1}. Esto operará para todas las edades hasta $h = n$.

La razón de la posibilidad de desechar el equipo de capital antes del final de su vida física por volverse antieconómico aparece intuitivamente muy clara, pero no es tan clara la conclusión obtenida en el caso de productividad constante o creciente; en estos casos, el último especialmente, se trata de aprovechar la mayor productividad de los últimos años, una vez que la máquina entró en funcionamiento con las bajas productividades de los primeros años.

El caso de productividad creciente o constante viene representado en el gráfico 4.

Aquí vemos que para un $\pi = \pi$ (línea con trazos gruesos) a medida que el período de vida aumenta, el salario correspondiente también aumenta, de forma que el punto más alto de la curva corresponde a la vida máxima físicamente posible, que será la óptima. (Esta curva podría tener cualquier otra forma, por ejemplo, la correspondiente a π_0, con tal de que nunca decrezca.) Este análisis es válido para cualquier π dado, por lo que la vida óptima no depende de la tasa de beneficio, y así siempre será la vida física máxima.

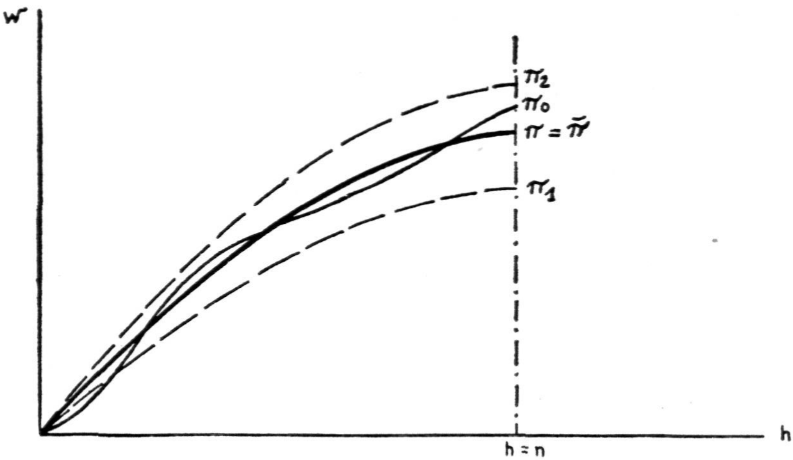

Fig. 4

A la vista de que con productividad creciente o constante la vida óptima no varía con cambios en π, está claro que una variación de la tasa de beneficio llevará aparejada una variación del salario en la dirección contraria en la medida en que el excedente real no varió.[15] Gráficamente esto significaría que cuando π aumentase a π_1, el sistema cambiaría a la curva π_1, que tiene todos sus puntos por debajo de la original. Si π hubiese decrecido a π_2, la curva pasaría a ser la π_2, con todos sus puntos encima de la curva π.

15. Por supuesto esto se puede deducir en términos analíticos; veámoslo para el caso de productividad constante. Derivando la expresión [15] obtenemos

$$\frac{d(1/w_h)}{d\pi} = -\frac{a_k}{C_o} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{h} (-i-1)(1+\pi)^{-i-2}}{\left[\sum_{i=0}^{h} (1+\pi)^{-i-2}\right]^2},$$

de forma que $(dw/d\pi) < 0$.

3. *La Frontera Salario-Beneficio* [16]

El método que acabamos de aplicar para determinar que la relación $w - \pi$ es decreciente, no es válido para el caso de productividad decreciente, ya que con las variaciones de estas dos variables podría variar la vida óptima. Este caso lo englobaremos dentro de la demostración más general de que, irrespectivamente del tipo de productividad, $dw/d\pi < 0$, siempre que el sistema permanezca en la vida óptima.

La expresión general para w cuando por cimplicidad consideramos solamente dos años de edad es

$$w_2 = \frac{C_0 (1+\pi)^{-1} + C_1 (1+\pi)^{-2}}{a_k + a_0 (1+\pi)^{-1} + a_1 (1+\pi)^{-2}} \qquad [17]$$

derivando, simplificando y sacando factor común a $(1+\pi)^{-2}$, y llamándole D al denominador de [17]), obtenemos

$$\frac{dw_2}{d\pi} = \frac{(1+\pi)^{-2}}{D^2} [- a_k C_0 - 2 a_k C_1 (1+\pi)^{-1} - a_0 C_1 (1+\pi)^{-2} + $$

$$+ a_1 C_0 (1+\pi)^{-2}] \qquad [18]$$

Esta derivada es menor que cero si

$$a_1 < \frac{a_k [C_0 + 2 C_1 (1+\pi)^{-1}] + a_0 C_1 (1+\pi)^{-2}}{C_0 (1+\pi)^{-2}} \qquad [19]$$

pero si la desigualdad fuese en la otra dirección ($\geq$), entonces tendríamos que $dw_2/d\pi \geq 0$. Supongamos que este último fuese el caso; procedamos, entonces, a sustituir en [17] en lugar de a_1, la parte derecha de [19] (que es menor o igual que a_1). Así tras simplificaciones obtenemos

$$w_2 \leq \frac{C_0^2 (1+\pi)^{-1} - C_0 C_1 (1+\pi)^{-2}}{a_k C_0 + a_0 C_0 (1+\pi)^{-1} + a_k [C_0 + 2 C_1 (1+\pi)^{-1}] + a_0 C_1 (1+\pi)^{-2}} \qquad [20]$$

Si comparamos la parte derecha de la desigualdad [20] con

16. Esta demostración, aunque absolutamente original en su planteamiento, está relacionada con el «teorema de truncación». Véase C. S. Soper, «The Marginal Efficiency of Capital: a Further Note», *Economic Journal* 1959; P. M. Karmel, «The Marginal Efficiency of Capital», *Economic Record*, 1959, que fueron los primeros que trataron con él. Posteriormente aparecieron otros trabajos; K. J. Arrow y P. Levhary, «Uniqueness of the Internal Rate of Return with a Variable Life of Investment», *Economic Journal*, 1969, y D. M. Nuti, «On the Truncation of Production Flows», Kyklos, 1973.

$$w_1 = \frac{C_0 (1 + \pi)^{-1}}{a_k + a_0 (1 + \pi)^{-1}}$$

obtendremos que aquélla es menor que éste.[17] Por lo tanto hemos obtenido que $w_2 < w_1$. Esto es, cuando $dw_2/d\pi > 0$, $w_2 < w_1$, lo que implica que la vida óptima no es de dos años. Si generalizamos a w_h y w_{h-1} en lugar de w_2 y w_1, tenemos que si h es la vida óptima $dw_h/d\pi < 0$; si no se diese esta última desigualdad tendríamos que $w_{h-1} > w_h$, con lo que $h - 1$ sería la vida óptima y $dw_{h-1}/d\pi < 0$, porque sino $w_{h-2} > w_{h-1}$, siendo w_{h-2} el salario correspondiente a la vida óptima, y así sucesivamente hasta que encontremos aquella edad, i, en la que efectivamente

$$\frac{dw_i}{d\pi} < 0.$$

4. *Obsolescencia con Progreso Técnico*

Hasta ahora el análisis de la obsolescencia ha sido realizado en ausencia de cualquier consideración sobre el progreso técnico. Ahora vamos a introducir este factor y considerar las alteraciones que produce en las conclusiones previas.

Consideremos primero el caso de progreso técnico no incorporado, con los supuestos ya establecidos. La línea salario-beneficio viene dada por [5] y cuando $t = 0$ es precisamente el caso dado en [11] en ausencia de progreso técnico. Por lo tanto podemos concluir que la introducción del progreso técnico no incorporado no afecta las anteriores conclusiones, excepto que para un $\bar{\pi}$ y h dados, el w correspondiente aumentará en el tiempo. En las figuras 3 y 4, esto implicaría que la curva se desplazaría hacia arriba con el paso del tiempo.

Pero la cuestión es diferente con progreso técnico incorporado del tipo aquí considerado, ya que vamos a demostrar que éste afecta a los resultados de la sección 2. La relación entre w y π en este caso viene dada por la expresión [9], donde sin pérdida de generalidad podemos suponer que $t = 0$, y por lo tanto $(1 + \rho)^t = 1$.

17. En efecto

$$w_1 > \frac{C_o^2(1 + \pi)^{-1} + C_oC_1(1 + \pi)^{-2}}{2a_kC_o + a_oC_o(1 + \pi)^{-1} + 2a_kC_1(1 + \pi)^{-1} + a_oC_1(1 + \pi)^{-2}}$$

si

$$2a_kC_o^2(1 + \pi)^{-1} + a_oC_o^2(1 + \pi)^{-2} - 2a_kC_oC_1(1 + \pi)^{-2} + a_oC_oC_1(1 + \pi)^{-3} > a_kC_o^2(1 + \pi)^{-1} + a_kC_oC_1(1 + \pi)^{-2} + a_oC_o^2(1 + \pi)^{-2} + a_oC_oC_1(1 + \pi)^{-3},$$

lo cual es obviamente cierto.

Consideremos el caso de productividad constante. La línea salario-beneficio en este caso, y tras operaciones, vendrá dada por

$$\frac{1}{w_k} = \frac{a_k}{C_0 \sum_{i=0}^{h} (1+\pi)^{-i-1}} + \frac{h\, a_0}{C_0 \sum_{i=0}^{h} (1+\pi)^{-i-1}} . \qquad [21]$$

Está claro que los dos términos de la parte derecha de [21] cambiarán cuando h cambie. Empecemos analizando los cambios de la primera fracción; a medida que h aumenta ésta disminuye, ya que el numerador no se altera y el denominador aumenta. A medida que $h \to \infty$, este término tiende hacia $\frac{a_k \pi}{C_0}$.

Consideremos la segunda fracción de [21]. Tanto el numerador como el denominador aumentan con h; en un momento determinado la tendencia del término en su conjunto dependerá de los valores de C_0 y a_0. Pero a medida que h aumenta, está claro que el efecto del aumento del numerador superará en términos relativos el efecto del aumento del denominador, ya que de hecho cada nuevo término añadido al denominador será más y más pequeño, mientras que en el numerador estamos añadiendo un término constante. Así pues toda la fracción empezará eventualmente a crecer, con una tasa creciente; dado que la primera fracción crecía a una tasa decreciente, la segunda se volverá en algún momento la dominante, y el valor total de [21] aumentará. En otras palabras, el salario pagado aumentará con la vida del equipo hasta una edad dada, a partir de la cual empezará a decrecer.

Este resultado puede representarse gráficamente como en la fig. 4, de forma que a una edad dada h_0 compensa truncar la técnica y así permanecer en la cima de la curva. Esto contradice el teorema que se demostró para el caso de productividad constante en ausencia de progreso técnico (o cuando éste era no incorporado). Esto es debido al hecho de que los diferentes coeficientes de trabajo en uso en un momento determinado están reflejando los diferentes progresos técnicos que han venido incorporados en épocas diferentes. Este efecto sobre los coeficientes puede ser visualizado como transformando la productividad constante exhibida en los coeficientes correspondientes al proceso iniciado cada año en productividad decreciente exhibida en los coeficientes realmente en uso en un momento dado.

Por extensión podemos probar que este razonamiento también opera en algunos casos de productividad creciente, haciendo rentable truncar el proceso. Consideremos el caso general en el que la productividad puede ser de cualquier tipo, y existe progreso técnico incorporado. En este caso tenemos.

$$\frac{1}{w_h} = \frac{a_k}{\sum_{i=0}^{h} C_i (1+\pi)^{-i-1}} + \frac{\sum_{i=0}^{h} a_i}{\sum_{i=0} C_i (1+\pi)^{-i-1}} \qquad [22]$$

A medida que h aumenta la primera fracción de la parte derecha de [22] disminuye, en tanto que la segunda puede aumentar o disminuir. A medida que h aumenta, esta segunda fracción adquiere adiciones contínuas de coeficientes de trabajo en el numerador, mientras que el denominador gana la adición del correspondiente C_h, pero dividido por $(1+\pi)^{h+1}$, un término que crece con h. Suponiendo que tanto C_i como a_i adquieren valores normales (que los primeros no aumenten indefinidamente a medida que la generación envejece), el numerador recibirá términos más o menos constantes, en tanto que los del denominador serían decrecientes. Entonces la fracción en cuestión, a partir de un h en adelante, aumentará con h.

En la medida que la primera fracción de [22] disminuye a una tasa decreciente, en algún momento la segunda puede convertirse en la dominante, con lo que el valor total de [22] aumentará. En otras palabras, w_h, desde un h en adelante, empezaría a decrecer, por lo que sería rentable truncar la técnica antes del final de su vida física. Entonces hemos probado que con progreso técnico incorporado, siempre puede resultar viable el truncar la técnica, irrespectivamente de la productividad de los coeficientes «básicos», siempre que estos mantengan valores «realísticos».

5. *Cambios en la vida óptima cuando cambia* la *tasa de beneficio*[18]

A continuación consideraremos, suponiendo productividad constante y progreso técnico incorporado, si un cambio en la tasa de beneficio altera la vida óptima, y de qué forma tiene lugar esta alteración. Suponemos que para una tasa de beneficio dada, $\bar{\pi}$, h es la vida óptima, lo que significa que el salario correspondiente, w_h, es el mayor que el sistema puede pagar; esto es, $w_i < w_h$, $\bar{\forall}$ i. Así pues tenemos que

$$w_{h-1} - w_h = \frac{C_0 \sum_{i=0}^{h-1} (1+\pi)^{-i-1}}{a_k + h\, a_0} - \frac{C_0 \sum_{i=0} (1+\pi)^{-i-1}}{a_k + (h+1)\, a_0} < 0, \qquad [23]$$

18. En esta sección asumimos que el cambio en la tasa de beneficio va acompañado de un cambio igual en la tasa de crecimiento del sistema que como sabemos en este caso está asociado al progreso técnico. Este supuesto es muy fuerte, pero de otra forma dejaríamos el «golden age» y aunque el argumento no parece que cambiase, se volvería más complicado.

lo que implica que

$$\frac{(1+\pi)^{-h-1}}{a_0} > \frac{\sum_{i=0}^{h-1}(1+\pi)^{-i-1}}{a_k + h\,a_0}. \qquad [24]$$

Por otra parte derivando la expresión [23], obtenemos

$$\frac{d\,w_{h-1}}{d\,\pi} - \frac{d\,w_h}{d\,\pi} = \frac{C_0 \sum_{i=0}^{h-1}(-i-1)(1+\pi)^{-i-2}}{a_k + h\,a_0} -$$

$$- \frac{C_0\left[\sum_{i=0}^{h-1}(-i-1)\ (1+\pi)^{-i-2} + (-h-1)\ (1+\pi)^{-h-2}\right]}{a_k + h\,a_0 + a_0}. \qquad [25]$$

La expresión [25] será mayor que cero si la segunda fracción es menor que la primera (mayor en valor absoluto), y esto tiene lugar cuando

$$\frac{(-h-1)\ (1+\pi)^{-h-2}}{a_0} < \frac{\sum_{i=0}^{h-1}(-i-1)\ (1+\pi)^{-i-2}}{a_k + h\,a_0}. \qquad [26]$$

Multiplicando ambas partes de la desigualdad [24] por $(-h-1)\,(1+\pi)^{-1}$ obtenemos

$$\frac{(-h-1)(1+\pi)^{-h-2}}{a_0} > \frac{(-h-1)\sum_{i=0}^{h-1}(1+\pi)^{-i-2}}{a_k + h\,a_0} \qquad [27]$$

La siguiente desigualdad

$$\frac{(-h-1)\sum_{i=0}^{h-1}(1+\pi)^{-i-2}}{a_k + h\,a_0} < \frac{\sum_{i=0}^{h-1}(-i-1)\ (1+\pi)^{-i-2}}{a_k + h\,a_0} \qquad [28]$$

se mantiene siempre por razones obvias. Entonces en base a [27] y [28] tenemos que [26] se cumple, y por lo tanto obtenemos

$$\frac{dw_{h-1}}{d\pi} > \frac{dw_h}{d\pi}. \qquad [29]$$

Esto es válido para cualquier $w_{h-i} < w_h, i = 1, \dots, h - 1$.

Ahora podríamos considerar los mismos pasos pero en relación a los salarios correspondientes a las vidas h y h + 1, que mantienen la desigualdad,

$$w_h > w_{h+j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n - h$$

pero nos encontraríamos con que no podemos decir nada acerca del signo de la derivada

$$\frac{dw_h}{d\pi} - \frac{dw_{h+1}}{d\pi}$$

al contrario que en [25], ya que la simetría no se mantiene. Entonces podemos escribir

$$\frac{dw_{h-i}}{d\pi} > \frac{dw_h}{d\pi} \lesseqgtr \frac{dw_{h+j}}{d\pi},$$

$$i = 1, 2, \dots, h - 1$$
$$j = 1, \dots, n - h$$

Además, antes vimos que para cada duración concreta,

$$\frac{dw_i}{d\pi} < 0, \qquad \forall\, i$$

En la sección 2 vimos que con productividad constante un cambio en la tasa de beneficio no afectaba a la vida óptima; como podemos ver esto no es necesariamente cierto con el progreso técnico aquí supuesto.

Consideremos primero el caso de un incremento en la tasa de beneficio; esto producirá que el salario w_{h-i} decrezca más que w_h de modo que la vida óptima no decrecerá, sino que aumentará o permanecerá

19. Asignando los valores precisos a los coeficientes se pueden construir ejemplos para obtener cualquiera de las desigualdades

$$\frac{d\,w_h}{d\pi} \gtrless \frac{d\,w_{h+1}}{d\pi}.$$

inalterada. Si la tasa de beneficio decrece, w_{h-i} aumentará más que w_h, de forma que la vida óptima puede permanecer igual, aumentar o disminuir.

Esto significa dos cosas, primero que la duración económica del equipo depende de la tasa de beneficio, y segundo que la relación existente entre las dos variables de ningún modo es necesariamente monótona. Esto implica que con variaciones en la distribución de excedente del sistema la composición generacional de los bienes de capital puede cambiar o permanecer inalterada, y si cambia este cambio puede ser en cualquier dirección. Con esto se añade un nuevo argumento a una vieja controversia sobre el capital.

Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Santiago de Compostela